

Devoir sur Table 4

Durée : 4h

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. Tous les documents sur papier sont interdits.
3. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
4. Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
5. La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
6. Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
7. Mettez en évidence vos résultats en les encadrant ou les soulignant.
8. Conformément au règlement de la Banque PT
 - Composer lisiblement sur les copies avec un stylo à bille à encre foncée : bleue ou noire.
 - L'usage de liquide de correction et dérouleur de ruban correcteur est interdit.

Le soin apporté à la copie fera l'objet d'une évaluation suivant les critères suivants :

- Mise en évidence des résultats
- Soin et lisibilité de la copie. En particulier les traits, y compris pour les ratures, devront être tracés à l'aide d'une règle
- Respect des consignes concernant le liquide de correction et le dérouleur de ruban correcteur
- Respect de la grammaire et de l'orthographe

Exercice 1*(Banque PT, Maths C 2023)*

On considère la fonction F qui, à tout réel de son domaine de définition $\mathcal{D}_F$ associe

$$F(x) = \ln \left(\frac{x(x+1)}{(2x+1)^2} \right)$$

1. Déterminer $\mathcal{D}_F$, ce résultat sera nécessairement justifié à l'aide d'un tableau de signes.
2. Justifier que F est dérivable sur $\mathcal{D}_F$. On désigne par f sa dérivée.
3. Montrer que, pour tout réel x de $\mathcal{D}_F$:

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)(2x+1)}$$

4. On s'intéresse dans ce qui suit à la série entière $\sum_{n \geq 1} f(n)x^{2n+1}$
 - (a) Déterminer son rayon de convergence R .
 - (b) Rappeler le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ ainsi que son rayon de convergence.
 - (c)
 - i. Donner le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$, en précisant son rayon de convergence.
 - ii. Vérifier que, pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\frac{1}{1-x^2}$ peut s'exprimer comme combinaison linéaire de $\frac{1}{1-x}$ et $\frac{1}{1+x}$

- (d) Dédurre de la question précédente, en justifiant le résultat à l'aide d'un théorème de cours, le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$ en précisant le rayon de convergence que l'on comparera à la valeur R obtenue en 4.(a).
- (e) Montrer que, pour tout réel x de $] -R, R[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n} = -x \ln(1-x^2)$$

- (f) Pour tout réel x de $] -R, R[$, exprimer, à l'aide des fonctions usuelles

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)}$$

On pourra utiliser sans la redémontrer l'égalité

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ 0, 1, -\frac{1}{2} \right\}, \quad \frac{1}{x(x+1)(2x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - \frac{4}{2x+1}$$

- (g) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)}$

Exercice 2

(Banque PT, Maths A 2012)

Les parties I et II de ce problème sont indépendantes.

Question préliminaire

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et f et g deux endomorphismes de E tels que

$$f \circ g = g \circ f$$

Soit λ une valeur propre de f , $E_\lambda(f)$ le sous-espace propre associé. Montrer que le sous-espace $E_\lambda(f)$ est stable par g c'est à dire

$$\forall x \in E_\lambda(f), \quad g(x) \in E_\lambda(f)$$

Partie I

Soit f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f et g commutent.
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f et g . Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ? trigonalisables ?
3. On note e_1 un vecteur propre de g associé à la valeur propre 2. En utilisant la question préliminaire, déterminer un vecteur e_2 non colinéaire à e_1 tel que le sous-espace Vect(e_1, e_2) soit stable par f et par g .

En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont triangulaires supérieures.

Partie II

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension n , $n \in \mathbb{N}^*$, et soit f un endomorphisme de E admettant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

1. Montrer qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E constituée de vecteurs propres de f .

2. Soit $(a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{C}^{d+1}$. On considère le polynôme P défini par

$$P = \sum_{i=0}^d a_i X^i$$

Soit u l'endomorphisme de E défini par

$$u = P(f) = \sum_{i=0}^d a_i f^i$$

avec $f^0 = Id$ l'application identité de E , et pour $k \geq 1$, $f^k = f \circ \dots \circ f$ est la k -ième composée de f .

- Montrer que f et u commutent.
 - Soit x un vecteur propre de f pour la valeur propre λ . Vérifier que x est alors un vecteur propre de u et déterminer la valeur propre associée.
 - Exprimer alors les valeurs propres de u en fonction de celles de f et montrer que u est diagonalisable dans la même base que f .
3. On suppose dans cette question uniquement que $E = \mathbb{C}^5$. On note I_5 la matrice identité d'ordre 5. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

- Déterminer les valeurs propres (éventuellement complexes) de A .
 - Trouver 5 nombres réels a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 tels que

$$B = a_0 I_5 + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3 + a_4 A^4$$
 - En déduire les valeurs propres (éventuellement complexes) de B .
4. On revient à un espace E général. Soit g un endomorphisme de E qui commute avec f .
- Quelle est la dimension de E_{λ_i} , sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i ?
 - En déduire, en se servant également de la question préliminaire que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, e_i est également un vecteur propre de g . On notera μ_i la valeur propre associée.
 - g est-il diagonalisable?
 - On note $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes de degré strictement inférieur à n et on considère l'application

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \mathbb{C}_{n-1}[X] & \rightarrow & \mathbb{C}^n \\ P & \mapsto & (P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)) \end{array}$$

- Vérifier que l'application φ est linéaire.
- Vérifier que son noyau est réduit au polynôme nul.
- Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré strictement inférieur à n tel que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(\lambda_i) = \mu_i$$

- Déduire des questions précédentes qu'il existe un polynôme P de degré strictement inférieur à n tel que $g = P(f)$.
5. On considère la matrice

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

- Déterminer une matrice orthogonale Q telle que $Q^{-1}MQ$ soit diagonale.
- On cherche une matrice N telle que $N^2 = M$. Montrer en utilisant les résultats de la question 4. que, si une telle matrice N existe, alors,
 - $Q^{-1}NQ$ est diagonale.
 - Il existe deux réels α et β tels que $N = \alpha I_2 + \beta M$ où I_2 désigne la matrice identité d'ordre 2.
- Déterminer toutes les matrices N vérifiant $N^2 = M$.

Exercice 3*(Mines d'Albi, Alès, Douai, Nantes 2006)*

Dans tout l'exercice, on adopte la notation $\ln^k(x)$ (avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, +\infty[$) comme écriture simplifiée du nombre réel $(\ln(x))^k$ et, par convention, on pose $\ln^0(x) = 1$ (y compris si $x = 1$).

Pour tout nombre réel strictement positif t , on pose :
$$\begin{cases} x(t) &= t \ln^3(t) \\ y(t) &= t \ln^2(t) \end{cases}$$

On pose également $x(0) = y(0) = \lambda \in \mathbb{R}$.

On souhaite étudier l'arc paramétré $f : t \mapsto (x(t), y(t))$.

Le plan usuel de la géométrie est muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x(t), y(t))$ lorsque t décrit $\mathbb{R}_+$.

1. Pour quelle valeur de λ les fonctions x et y sont-elles continues en 0 ?

On suppose dans la suite que λ prend cette valeur.

2. Déterminer, sur $]0, +\infty[$, les fonctions dérivées x' et y' puis étudier leur signe.
3. Donner dans un même tableau les variations des deux fonctions x et y .

Dans ce tableau devront figurer les limites aux bornes, ainsi que les valeurs de x et y aux points particuliers. Ces valeurs seront données sous l'une des trois formes suivantes : n , $\frac{n}{e^2}$

ou bien $\frac{n}{e^3}$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

4. (a) Montrer que l'arc admet un unique point singulier pour un paramètre t_0 à déterminer et préciser la nature de ce point singulier.
(b) Représenter sur un schéma, sans étude supplémentaire, l'allure de $\mathcal{C}$ lorsque t est au voisinage de t_0 , en mettant en évidence la tangente au point singulier.
5. Étudier les éventuelles branches infinies de l'arc paramétrée ainsi que l'existence éventuelle d'une demi-tangente à l'arc au point de paramètre $t = 0$.
6. Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite Δ d'équation $y = x$.
7. Tracer $\mathcal{C}$ sur le papier millimétré fourni en annexe en prenant pour unité graphique 4 cm.

On donne les valeurs approchées suivantes (à 0.01 près) : $e^{-2} \simeq 0,14$ et $e^{-3} \simeq 0,05$.

Corrigé

Corrigé de l'exercice 1

1. F est définie sur $\left\{x \in \mathbb{R}, 2x+1 \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{x(x+1)}{(2x+1)^2} > 0\right\}$.

On va tracer le tableau de signe de $\frac{x(x+1)}{(2x+1)^2}$

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$	
$x+1$	$-$	0		$+$		
$2x+1$		$-$	0	$+$		
$\frac{x(x+1)}{(2x+1)^2}$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$

Ainsi $\mathcal{D}_F =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.

2. La fonction $x \mapsto \frac{x(x+1)}{(2x+1)^2}$ est dérivable sur $\mathcal{D}_F$ en tant que quotient de fonctions dérivables.

Sur $\mathcal{D}_F$ cette fonction prend des valeurs strictement positives. Comme la fonction $\ln$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ on en déduit que F est dérivable sur $\mathcal{D}_F$.

3. Soit $x \in \mathcal{D}_F$, on a alors

$$\begin{aligned}
 f(x) &= F'(x) \\
 &= \frac{(2x+1)^3 - 4x(x+1)(2x+1)}{(2x+1)^4} \frac{(2x+1)^2}{x(x+1)} \\
 &= \frac{(2x+1)^2 - 4x(x+1)}{x(x+1)(2x+1)} \\
 &= \frac{4x^2 + 4x + 1 - 4x^2 - 4x}{x(x+1)(2x+1)} \\
 &= \frac{1}{x(x+1)(2x+1)}
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall x \in \mathcal{D}_F, \quad f(x) = \frac{1}{x(x+1)(2x+1)}$$

4. (a) Pour $n \geq 1$ et $x \neq 0$ on a

$$\frac{f(n+1)x^{2n+3}}{f(n)x^{2n+1}} = \frac{n(n+1)(2n+1)x^2}{(n+1)(n+2)(2n+3)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x^2$$

D'après le critère de d'Alembert on en déduit que $\sum f(n)x^{2n+1}$ converge absolument si $x < 1$ et diverge grossièrement $x > 1$.

On en déduit que $R = 1$.

- (b) On sait que le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1-x)$ a pour rayon 1 et

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-x^n}{n}$$

- (c) i. De nouveau d'après le cours le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$ a pour rayon 1
et

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$$

- ii. On a, par décomposition en éléments simple,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad \frac{1}{2} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-x^2}$$

- (d) Pour $x \in]-1, 1[$ on a $\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{2} \ln(1-x)$. Ainsi la fonction $x \mapsto \frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{2} \ln(1-x)$ est l'unique primitive s'annulant en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$.

D'après le théorème de primitivation terme à terme pour les séries on en déduit que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Comme $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2n+1}$ diverge on en déduit que 1 n'appartient pas à l'intervalle ouvert de convergence de la cette série entière. Son rayon de convergence est donc $1 = R$.

- (e) On sait que, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

Ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n} = -\ln(1-x^2)$$

Et donc

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n} = -x \ln(1-x^2)$$

- (f) Pour $n \geq 1$ on a

$$\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}$$

Les séries entières $\sum_{n \geq 1} \frac{x^{2n+1}}{n}$, $\sum_{n \geq 1} \frac{x^{2n+1}}{n+1}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ sont toutes les trois de rayon de convergence 1, ainsi, pour $x \in]-1, 1[$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n} + \frac{x^{2n+1}}{n+1} - \frac{4x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n+1} - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= -x \ln(1-x^2) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{n} - 4 \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - x \right) \\ &= -x \ln(1-x^2) + \frac{1}{x} \left(-x^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n} \right) - 2 \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + 4x \end{aligned}$$

Convergence

Avant d'utiliser la linéarité il faut bien penser à justifier que toutes les séries en jeu convergent

$$\begin{aligned}
&= -x \ln(1-x^2) + \frac{1}{x} (-x^2 - \ln(1-x^2)) - 2 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + 4x \\
&= \frac{-(1+x^2) \ln(1-x^2)}{x} - 2 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + 3x
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{-(1+x^2) \ln(1-x^2)}{x} - 2 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + 3x$$

- (g) On a $\frac{1^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^3}$. Or la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n^3}$ converge en tant que série de Riemann. Ainsi, par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$ converge.

Notons $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)}$. On sait alors que S est définie en 1 et que, pour $x \in]-1, 1[$,

$$S(x) = \frac{-(1+x^2) \ln(1-x^2)}{x} - 2 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + 3x$$

Or une fonction somme de série entière est continue sur son ensemble de définition, S est donc continue en 1.

Ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(1+x^2) \ln(1-x^2)}{x} - 2 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + 3x$$

Or, pour $x \in]-1, 1[$ on a

$$\begin{aligned}
S(x) &= \frac{-(1+x^2) \ln(1-x^2)}{x} - 2 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + 3x \\
&= \frac{-(1+x^2) \ln(1-x)}{x} + \frac{-(1+x^2) \ln(1+x)}{x} - 2 \ln(1+x) + 2 \ln(1-x) + 3x \\
&= -\frac{(1-2x+x^2) \ln(1-x)}{x} - \frac{(1+2x+x^2) \ln(1+x)}{x} + 3x \\
&= -\frac{(1-x)^2 \ln(1-x)}{x} - \frac{(1+x)^2 \ln(1+x)}{x} + 3x
\end{aligned}$$

Or, par croissance comparées $\lim_{u \rightarrow 0} u^2 \ln(u) = 0$, d'où

$$\lim_{x \rightarrow 1} -\frac{(1-x)^2 \ln(1-x)}{x} - \frac{(1+x)^2 \ln(1+x)}{x} + 3x = 0 - 4 \ln(2) + 3$$

Ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)(2n+1)} = 3 - 4 \ln(2)$$

Théorème

Ce résultat du cours s'appelle également le Théorème d'Abel radial

Corrigé de l'exercice 2

Question préliminaire

Soit $x \in E_\lambda(f)$, on a alors

$$f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$$

Ainsi $g(x) \in E_\lambda(f)$. Donc $E_\lambda(f)$ est stable par g .

Partie I

1. f et g commutent si et seulement si leurs matrices dans la base canonique commutent donc si et seulement si $AB = BA$.

$$\text{Or } AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ainsi f et g commutent.

2. On commence par calculer les polynômes caractéristiques de A et B :

$$\begin{aligned} \chi_A &= \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 0 \\ 0 & X & 1 \\ 0 & -1 & X-2 \end{vmatrix} \\ &= (X-1) \begin{vmatrix} X & 1 \\ -1 & X-2 \end{vmatrix} \\ &= (X-1)(X(X-2)+1) \\ &= (X-1)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_B &= \begin{vmatrix} X & -1 & -1 \\ 1 & X-1 & 1 \\ -1 & -1 & X-3 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & X-1 & 1 \\ X & -1 & -1 \\ -1 & -1 & X-3 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & X-1 & 1 \\ 0 & -X^2+X-1 & -X-1 \\ 0 & X-2 & X-2 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & X-2 & 1 \\ 0 & 2 \cdot X - X^2 & -X-1 \\ 0 & 0 & X-2 \end{vmatrix} \\ &= X(X-2)^2 \end{aligned}$$

Ainsi $\text{Sp}(f) = \{1\}$ et $\text{Sp}(g) = \{0, 2\}$.

De plus

$$\begin{aligned} E_1(f) &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x+0y+0z = x \\ 0x+0y-z = y \\ 0x+y+2z = z \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} 0 = 0 \\ y+z = 0 \end{cases} \right\} \\ &= \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, -1)) \end{aligned}$$

$$E_1(f) = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, -1))$$

$$\begin{aligned} E_0(g) &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} y+z = 0 \\ -x+y-z = 0 \\ x+y+3z = 0 \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} y+z = 0 \\ x+2z = 0 \end{cases} \right\} \end{aligned}$$

$$= \text{Vect}((2, 1, -1))$$

$$\begin{aligned} E_2(g) &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} y + z &= 2x \\ -x + y - z &= 2y \\ x + y + 3z &= 2z \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} -2x + y + z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \end{cases} \right\} \\ &= \text{Vect}((0, 1, -1)) \end{aligned}$$

$$E_0(g) = \text{Vect}((2, 1, -1)), \quad E_2(g) = \text{Vect}((0, 1, -1))$$

Comme χ_A et χ_B sont scindés sur $\mathbb{R}$, A et B sont trigonalisables.

De plus $\dim(E_1(f)) = 1 \neq 3$ et $\dim(E_0(g)) + \dim(E_2(g)) = 2 \neq 3$ donc f et g ne sont pas diagonalisables.

3. Prenons $e_1 = (0, 1, -1)$.

D'après la question préliminaire, comme f et g commutent, $E_1(f)$ est stable par g , ainsi $g((1, 0, 0)) \in \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, -1))$

Or $g((0, 1, -1)) = 2(0, 1, -1) \in \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, -1))$, $f((0, 1, -1)) = (0, 1, -1) \in \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, -1))$ et $f((1, 0, 0)) = (1, 0, 0) \in \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, -1))$.

Ainsi en prenant $e_1 = (0, 1, -1)$ on a bien $\text{Vect}(e_1, e_2)$ stable par f et par g .

La famille (e_1, e_2) est libre, on la complète alors en une base (e_1, e_2, e_3)

Alors $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = e_2$ et, il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(e_3) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$.

Ainsi

$$\text{Mat}_{(e_1, e_2, e_3)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

De plus $g(e_1) = 2e_1$. Comme $g(e_2) \in \text{Vect}(e_1, e_2)$ il existe $(\delta, \varepsilon) \in \mathbb{R}^2$ tel que $g(e_2) = \delta e_1 + \varepsilon e_2$. Enfin il existe $(\zeta, \eta, \theta) \in \mathbb{R}^3$ tel que $g(e_3) = \zeta e_1 + \eta e_2 + \theta e_3$. Ainsi

$$\text{Mat}_{(e_1, e_2, e_3)}(g) = \begin{pmatrix} 2 & \delta & \zeta \\ 0 & \varepsilon & \eta \\ 0 & 0 & \theta \end{pmatrix}$$

Finalement dans la base (e_1, e_2, e_3) les matrices de f et de g sont triangulaires supérieures.

Partie II

1. f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n qui admet exactement n valeurs propres distinctes, il est donc diagonalisable.

En d'autres termes il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E constituée de vecteurs propres de f .

(a) On a

$$\begin{aligned} f \circ u &= f \circ \left(\sum_{i=0}^d a_i f^i \right) \\ &= \sum_{i=0}^d a_i f^{i+1} \\ &= \left(\sum_{i=0}^d a_i f^i \right) \circ f \end{aligned}$$

Remarque

On pourrait par exemple prendre $e_3 = (2, 1, -1)$ pour simplifier un petit peu la suite mais ce n'est pas nécessaire.

$$= u \circ f$$

Ainsi f et u commutent.

- (b) On a $f(x) = \lambda x$. Ainsi, pour $k \in \mathbb{N}$, $f^k(x) = \lambda^k x$.

D'où

$$u(x) = \sum_{i=0}^d a_i f^i(x) = \sum_{i=0}^d a_i \lambda^i x = P(\lambda)x$$

Ainsi x est un vecteur propre de f pour la valeur propre $P(\lambda)$.

- (c) La base $(e_1, \dots, e_n)$ est une base formée de vecteurs propres de f . D'après la question précédente ce sont également des vecteurs propres de u . Ainsi u et f sont diagonalisable dans la même base.

Dans cette base on a $\text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(u) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$

Ainsi $\text{Sp}(u) = \{P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)\}$.

2. (a) On a

$$\begin{aligned} \chi_A &= \begin{vmatrix} X & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & X \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & X^5 - 1 \\ -1 & X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & X \end{vmatrix} \\ &= X^5 - 1 \end{aligned} \quad L_1 \leftarrow L_1 + XL_2 + X^2L_3 + X^3L_4 + X^4L_5$$

Idée ?

A est une matrice compagnon, on a vu dans un exemple du cours une manière rapide d'obtenir son polynôme caractéristique.

En notant $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ on a alors

$$\text{Sp}(A) = \{1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$$

- (b) Remarquons que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $B = 5I_5 + A + 2A^2 + 3A^3 + 4A^4$.

- (c) On se trouve (en considérant les endomorphismes associés à A et B dans un cas particulier dans la question 2., ainsi, en notant $P = 5 + X + 2X^2 + 3X^3 + 4X^4$,

$$\text{Sp}(B) = \{P(1), P(\omega), P(\omega^2), P(\omega^3), P(\omega^4)\}$$

3. (a) f est un endomorphisme d'un espace de dimension n qui admet n valeurs propres distinctes. Il est donc diagonalisable et tous ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

Ainsi $\dim(E_{\lambda_i}(f)) = 1$.

- (b) e_i est un vecteur propre de f pour la valeur propre λ_i . Or $\dim(E_{\lambda_i}(f)) = 1$, ainsi $E_{\lambda_i}(f) = \text{Vect}(e_i)$.

D'après la question précédente $g(e_i) \in E_{\lambda_i}(f) = \text{Vect}(e_i)$, il existe donc $\mu_i \in \mathbb{C}$ tel que $g(e_i) = \mu_i e_i$.

Ainsi $\boxed{e_i \text{ est un vecteur propre de } g \text{ pour une valeur propre } \mu_i.}$

- (c) D'après la question précédente, $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E formée de vecteurs propres de g , ainsi $\boxed{g \text{ est diagonalisable.}}$
- (d) i. Soit $(P, Q) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $a \in \mathbb{C}$, on a alors

$$\begin{aligned}\varphi(P + aQ) &= ((P + aQ)(\lambda_1), \dots, (P + aQ)(\lambda_n)) \\ &= (P(\lambda_1) + aQ(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n) + aQ(\lambda_n)) \\ &= (P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)) + a(Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_n)) \\ &= \varphi(P) + a\varphi(Q)\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est bien linéaire.}}$

- ii. Soit $P \in \text{Ker}(\varphi)$, on a ainsi $P(\lambda_1) = \dots = P(\lambda_n) = 0$.

P est alors un polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 1$ qui admet au moins n racines distinctes, c'est donc le polynôme nul.

On en déduit $\boxed{\text{Ker}(\varphi) = \{0_{\mathbb{C}_{n-1}[X]}\}}.$

- iii. D'après la question précédente φ est injective. Or $\dim(\mathbb{C}_{n-1}[X]) = \dim(\mathbb{C}^n) = n$; Ainsi φ est bijective.

On en déduit qu' $\boxed{\text{il existe bien un unique polynôme } P \text{ tel que, pour tout } i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(\lambda_i) = \mu_i,}$ il s'agit plus précisément de $\varphi^{-1}((\mu_1, \dots, \mu_n))$.

- (e) Dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ on a

$$\text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(g) = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Et, d'après la question 2.(c),

$$\text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(P(f)) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Comme $\text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(g) = \text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(P(f))$, on a donc $\boxed{g = P(f)}.$

4. (a) M est une matrice symétrique réelle, elle est donc diagonalisable en base orthonormée.

De plus $\chi_M = (X - 4)(X - 1)$,

$$E_1(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad E_4(M) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Les sous-espaces propres de M sont deux-à-deux orthogonaux, pour obtenir une matrice orthogonale formée de vecteurs propres de M il nous suffit d'appliquer l'algorithme de

Gram-Schmidt sur chaque espace propre. On obtient $\boxed{Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$

- (b) Supposons qu'il existe N telle que $N^2 = M$, alors $NM = NN^2 = N^3 = N^2N = MN$, M et N commutent donc.

M admet deux valeurs propres distinctes. Ainsi, d'après la question 4. M et N sont diagonalisable dans une même base de vecteurs propres et il existe P de degré strictement inférieur à 2 tel que $N = P(M)$. Ainsi

$Q^{-1}NQ$ est diagonale

 et

il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $N = \alpha I_2 + \beta M$.

(c) Si N existe alors $Q^{-1}NQ$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

Puis

$$Q^{-1}MQ = Q^{-1}N^2Q = (Q^{-1}NQ)^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$$

or $Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, d'où $a \in \{-1, 1\}$ et $b \in \{-i, i\}$.

Ainsi

$$N \in \left\{ Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} Q^{-1}, Q \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} Q^{-1}, Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} Q^{-1}, Q \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} Q^{-1} \right\}$$

Réciproquement ces quatre matrices vérifient bien $N^2 = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} Q^{-1} = M$. Donc les matrices vérifiant $N^2 = M$ sont

$Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} Q^{-1}, \quad Q \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} Q^{-1}, \quad Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} Q^{-1}$ et $Q \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} Q^{-1}$

Corrigé de l'exercice 3

1. Par croissance comparées $\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln^3(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln^2(t) = 0$.

Ainsi x et y sont continues en 0 si et seulement si $\lambda = 0$.

2. Pour $t \in]0, +\infty[$ on a

$$x'(t) = \ln^3(t) + 3 \ln^2(t) = \ln^2(t)(3 + \ln(t)), \qquad y'(t) = \ln^2(t) + 2 \ln(t) = \ln(t)(2 + \ln(t))$$

On a le tableau de signe suivant

t	0	e^{-3}	e^{-2}	1	$+\infty$		
$x'(t)$		−	0	+	0	+	
$y'(t)$			+	0	−	0	+

3. On en déduit le tableau de variations suivant

t	0	e^{-3}	e^{-2}	1	$+\infty$
$x'(t)$		-	0	+	+
x	0	$-\frac{27}{e^3}$	$-\frac{8}{e^2}$	0	$+\infty$
y	0	$\frac{9}{e^3}$	$\frac{4}{e^2}$	0	$+\infty$
$y'(t)$		+	0	-	+

4. (a) x' et y' s'annulent simultanément uniquement en $t = 1$. ainsi l'arc admet un unique point singulier en $t_0 = 1$.

De plus

$$x(1+s) \underset{s \rightarrow 0}{=} (1+s) \ln^3(1+s) \underset{s \rightarrow 0}{=} (1+s)(s+o(s))^3 \underset{s \rightarrow 0}{=} s^3 + o(s^3)$$

$$y(1+s) \underset{s \rightarrow 0}{=} (1+s) \ln^3(1+s) \underset{s \rightarrow 0}{=} (1+s) \left(s - \frac{s^2}{2} + o(s^2) \right)^2 \underset{s \rightarrow 0}{=} (1+s)(s^2 - s^3 + o(s^3)) \underset{s \rightarrow 0}{=} s^2 + o(s^3)$$

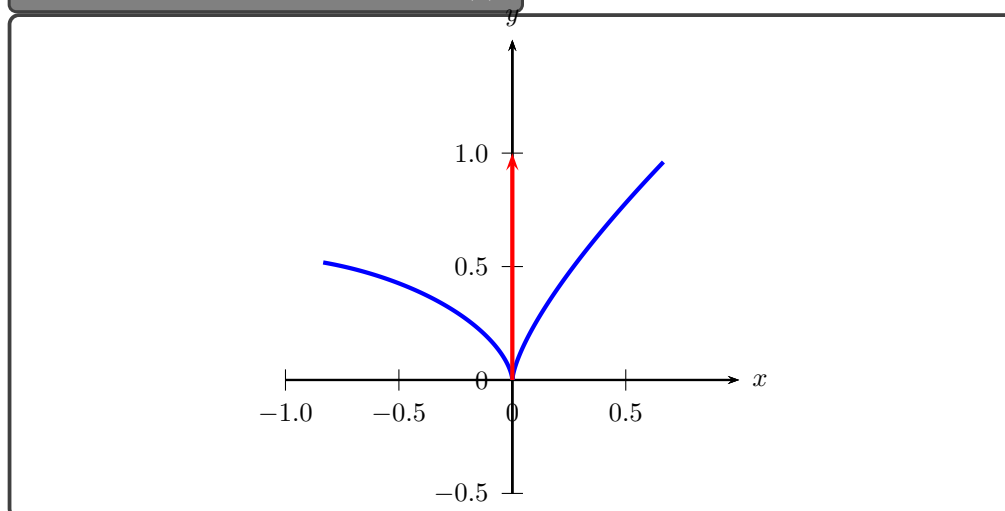
D'où

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \underset{t \rightarrow 1}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (t-1)^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (t-1)^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + o((t-1)^3)$$

Comme la famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est libre on en déduit que $M(1)$ est un point de rebroussement de première espèce.

- (b) D'après l'étude précédente la tangente à l'arc en $M(1)$ est dirigée par le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. La courbe $\mathcal{C}$ a ainsi l'allure suivante au voisinage de $M(1)$:

Figure .1 – Allure au voisinage de $M(1)$



5. Il y a une branche infinie quand t tend vers $+\infty$.

$$\text{On a } \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{1}{\ln(t)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } y(t) - 0x(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Ainsi la courbe admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des abscisses.

De plus $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = 0$. Ainsi la courbe admet en $t = 0$ une demi-tangente d'équation $y = 0(x - x(0)) + x(0) = 0$. En d'autres termes la courbe admet en $t = 0$ une demi-tangente horizontale, comme x est négative au voisinage de 0, il s'agit de

la demi-tangente passant par $(0, 0)$ et dirigée par le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

6. On cherche pour quel(s) paramètre(s) t a-t-on $x(t) = y(t)$.

C'est le cas pour $t = 0$ et pour $t > 0$,

$$\begin{aligned} x(t) = y(t) &\Leftrightarrow t \ln^3(t) = t \ln^2(t) \\ &\Leftrightarrow t \ln^2(t) (\ln(t) - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow t \in \{1, e\} \end{aligned}$$

Les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et la droite Δ sont $M(0) = (0, 0)$, $M(1) = (0, 0)$ et $M(e) = (e, e)$.

7. On place d'abord les points particuliers et les tangentes en ces points : le point de rebroussement $M(1)$, le point $M(e^{-3})$ où la courbe admet une tangente verticale, le point $M(e^{-2})$ où la courbe admet une tangente horizontale, le point $M(0)$ où la courbe admet une demi-tangente horizontale. On trace également la droite Δ et on place le point $M(e)$.

On obtient alors le tracé suivant :

Figure .2

